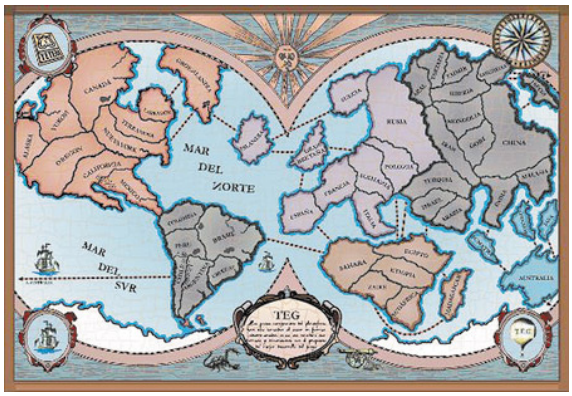
Trabajo Práctico

Problemas de combinatoria y recursión en la predicción de alianzas



Taller de Álgebra
Primer cuatrimestre 2017

Fecha límite de entrega:
Martes **20 de Junio** hasta las **23:59** hs.
Coloquio: 28 y 30 de Junio (en su turno)

1. Introducción

Son muchos los problemas de la vida real que requieren la resolución de problemas combinatorios. En este trabajo práctico vamos a implementar un modelo de predicción de alianzas. Por ejemplo, conociendo la afinidad entre los distintos países europeos podemos predecir las alianzas que se produjeron en la segunda guerra mundial o a partir de información de empresas de computación predecir la formación de alianzas en los años 80 para establecer los protocolos del sistema operativo UNIX. Estos dos casos están estudiados en detalle en el trabajo [1]. [1]

Los agentes (países, empresas o personas según el caso) van a elegir en qué bandos participar en función de cuán bien o cuán mal se llevan con los integrantes de cada lado, optando por aquel bando en el que se sientan más cómodos. En este TP supondremos que sólo existen dos bandos (A y B) y que existen n agentes (a_1, $a_2 \dots$ a_n), cada agente pertenece a uno solo de los bandos.

Las relaciones entre los agentes puede codificarse mediante una matriz R cuadrada en la que filas y columnas representan a los agentes, y en la intersección está el valor de su relación (un número real). Es decir la casilla R_{ij} representa la relación entre el agente a_i y el agente a_j (mientras más grande es ese valor, mejor se llevan esos agentes entre sí). Además, supondremos que la matriz es simétrica (es decir, la relación entre a_i y a_j es igual a la relación entre a_j y a_i para todo i, j). Por ejemplo, teniendo tres agentes a_1, a_2 y a_3, una posible matriz de relaciones puede ser

[1] Esta teoría tiene aplicaciones también en física y en ciencias cognitivas (el modelo de Ising [3] y a la memoria asociativa de Hopfield [2]).

$$R = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 5.2 \\ -3 & 5.2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{1}$$

En nuestro caso, implementaremos esta matriz como una `[[Float]]`, por ejemplo, esta relación se implementa como:

```
relacionesEjemplo = [[0, 2, -3], [2, 0, 5.2], [-3, 5.2, 0]]
```
(2)

La i-ésima lista en `relacionesEjemplo` corresponde a la i-ésima fila de la matriz y representa la relación del agente a_i con cada uno de los agentes del sistema.

Estados

- Llamaremos ESTADO (S) a la composición de los bandos, es decir, qué agente pertenece a cada bando.
- Representaremos a un estado como el conjunto de agentes que pertenece al bando A. Por ejemplo: $S = \{a_1, a_5, a_{45}\}$ indica que estos tres agentes pertenecen al bando A y el resto de los agentes (el complemento de S) al bando B.
- Decimos que S' es un ESTADO ADYACENTE a un estado S si se produce cambiando el bando de un único agente. Por ejemplo, para el caso anterior, un estado adyacente podría ser $S' = \{a_1, a_{45}\}$ o $S' = \{a_1, a_5, a_6, a_{45}\}$

Frustración

Los agentes se sienten más cómodos o incómodos dado el bando del resto de los jugadores y de las relaciones que tiene con ellos en la matriz R. La forma de medir la FRUSTRACIÓN de un agente i dadas la matriz de relaciones R y el estado S del sistema es:

$$F_i(S, R) = \sum_{j \in \text{enemigos}_S(i)} R_{ij} \tag{3}$$

donde $\text{enemigos}_S(i)$ es el conjunto de los agentes del bando contrario a a_i para un estado S. Es decir, la frustración de un agente es la suma de los valores de su relación con cada uno de los agentes del otro bando.

Por ejemplo, para la relación R dada en (Eq. 1) y el estado $S = \{a_1, a_3\}$, la frustración del agente 2 es $R_{21} + R_{23} = 7.2$.

Por último, definimos la ENERGÍA total del sistema en un estado como la suma de las frustraciones de cada agente.

$$E(S, R) = \sum_{i=1}^{n} F_i(S, R) \tag{4}$$

Llamaremos ESTADOS ESTABLES (S^*) a los estados en los cuales ningún agente puede disminuir su frustración cambiándose de bando, es decir, ningún estado adyacente a S^* disminuye la frustración del agente que cambió de bando.

El problema

El problema que queremos resolver en el TP es, dada una matriz de relaciones R, determinar cuáles son todos los estados estables del sistema, es decir, los estados S^*. Intuitivamente, pensamos que si algún agente puede cambiarse de bando y estar más contento, el sistema no es estable, ese agente se va a cambiar en cualquier momento.

Lamentablemente, no se conoce un método analítico (una fórmula) que permita encontrar estos estados. Por lo tanto, implementaremos un algoritmo que resuelva el problema.

Aclaraciones generales

- El código debe ser declarativo (el algoritmo debe quedar claro al leer el código).
- Se deben utilizar las técnicas vistas en clase y no otras.
- Se recomienda el uso de Pattern Matching para mejorar la legibilidad de las funciones.
- En ningún caso está permitido utilizar la función (!!) de Haskell.
- Pueden utilizar funciones vistas en clase que les faciliten su trabajo sin problema.
- Pueden crear cualquier función auxiliar y éstas **deben** estar acompañadas por su signatura (encabezado de la función con los tipos).
- Aunque no evaluamos eficiencia, recomendamos que piensen si no están haciendo cuentas de más ya que si lo hacen, no podrán ver el resultado de la sección 3

Archivos

En la página de la materia encontrarán dos archivos.

1. En el archivo `Datos.hs` se definen nuevos renombres de tipos y otros datos que veremos luego:

   ```
   type Set a = [a]  -- el tipo conjunto (visto en clase)
   type Relaciones = [[Float]] -- matriz de relaciones R
   type Agente = Integer
   type Estado = Set Agente -- estado (integrantes del bando A)
   type Frustracion = Float
   type Energia = Float
   ```

   Importante: Este archivo no deben modificarlo.

2. En el archivo `tp.hs` encontraran las funciones que deben implementar:

   Atención: Verán una línea que dice,

   ```
   import Datos
   ```

   Cuando quieran cargar en el interprete `ghci` el archivo `tp.hs` se va a cargar automáticamente el archivo `Datos.hs`. Para que funcione ambos archivos deben estar guardados en la misma carpeta.

   Importante: No se admite cambios en el nombre de funciones ni en las signaturas.

Ejercicios

Tip importante: para todos los puntos, puede suponerse que la matriz de relación contiene a los agentes existentes en el sistema y también que se trata de una matriz simétrica.

1. `relacion :: Relaciones -> Agente -> Agente -> Float`

   Que dados dos agentes, indique cuál es su relación. Por ejemplo:
   `relacion relacionesEjemplo 3 2` $\rightsquigarrow$ 5.2.

2. `enemigos :: Agente -> Integer -> Estado -> Set Agente`

   Que dado un agente, el número total de agentes del sistema y un estado determinado, indique el conjunto de agentes enemigos. Por ejemplo:
   `enemigos 1 10 [1, 2, 4]` $\rightsquigarrow$ `[3,5,6,7,8,9,10]`.
   `enemigos 3 10 [1, 2, 4]` $\rightsquigarrow$ `[1,2,4]`.

3. `frustracion :: Agente -> Relaciones -> Estado -> Frustracion`

   Implementar la ecuación 3. Ejemplo:
   `frustracion 2 relacionesEjemplo [1,3]` $\rightsquigarrow$ `7.2`

4. `energia :: Relaciones -> Estado -> Energia`

   Implementar la ecuación 4. Ejemplo:
   `energia relacionesEjemplo [1,3]` $\rightsquigarrow$ `14.4`

5. `adyacente :: Agente -> Estado -> Estado`

   Implementar una función que cambia de bando a un agente. Por ejemplo:
   `adyacente 1 [1..5]` $\rightsquigarrow$ `[2,3,4,5]`
   `adyacente 1 [2..5]` $\rightsquigarrow$ `[1,2,3,4,5]`

6. `esEstable :: Relaciones -> Estado -> Bool`

   Que indica si el estado es estable. Esta función la pueden calcular de dos maneras diferentes por lo siguiente: cuando las relaciones R son simétricas (como en el caso de este trabajo) se puede demostrar que:

   - si un agente reduce su frustración al cambiarse de bando, entonces también se reduce la frustración global del sistema, es decir, la energía.
   - los estados estables S^* coinciden con los estados S tal que todas sus estados adyacentes S' tienen mayor energía que S, es decir, los estados estables son mínimos locales de la función de energía.

   Por lo tanto,

   - esEstable $P \iff$ No hay agente que prefiera cambiarse de bando
   - esEstable $P \iff$ No hay estados adyacentes que tengan menor energía que S

   Por ejemplo:
   `esEstable relacionesEjemplo [1,3]` $\rightsquigarrow$ `False`
   `esEstable relacionesEjemplo [1]` $\rightsquigarrow$ `True`

7. A efectos prácticos los bandos son indistinguible con lo cual, si se tienen tres agentes: el estado $\emptyset$ equivale al $\{1, 2, 3\}$. Entonces, implementar la función

```
estadosPosibles :: Integer -> Set Estado
```

que dado el número de agentes del sistema, indica las posibles formas de formar bandos sin repetir estados indistinguibles. Por ejemplo,
`estadosPosibles 3` ⇝ `[[3],[3,1],[3,2],[3,2,1]]` (tener en cuenta que según la implementación el conjunto puede convertirse en el complemento)

8.
```
predicciones :: Relaciones -> [(Estado, Energia)]
```

Que enumera todos los estados estables junto con su energía. Esta función debe devolver una lista de todos los estados estables sin repetidos (ni resultados repetidos debido a estados indistinguibles). Por ejemplo,
`predicciones relacionesEjemplo` ⇝ `[([3,2],-2.0)]`

2. Pautas de Entrega

Observaciones generales:

- El trabajo se debe realizar en grupos de tres personas.
- El código fuente debe enviarse por mail a la lista de docentes de la materia: `algebra1-doc@dc.uba.ar`, indicando nombre, apellido y libreta (o DNI) de cada integrante.
- El programa debe correr usando `ghci` que está instalado en los laboratorios del DC.
- Se evaluará la correctitud, claridad y prolijidad del código entregado.
- La fecha límite de entrega es el Martes **20 de Junio** hasta las **23:59** hs

3. YAPA (hacer si tienen tiempo y ganas ☺)

Para testear el programa pueden verificar que el resultado de la función `predicciones` se corresponda con el obtenido por los autores del artículo citado [1]. Utilizaremos lo siguiente:

1. La matriz de relaciones utilizada por los autores para el caso de la segunda guerra mundial[2].
```
relacionesSegundaGuerra :: Relaciones
```
En esta constante encontrarán la matriz con las relaciones entre los 17 países europeos que participaron de la segunda guerra (tiene 17 filas y 17 columnas).

2. Y la lista:
```
nombresSegundaGuerra :: [String] -- solo para saber quien es quien
                                 -- en la matriz de Relaciones
```
Esta constante, es una lista con el nombre de los 17 países. El nombre del agente 1 se encuentra en la primera posición, el nombre del agente 2 en la segunda, etc.

3. Ejercicio para ustedes: implementar la función
```
mostrarPrediccionesGuerra :: [([String], [String]), Energia)]
```
Que devuelve las agrupaciones estables para estos datos mostrando los nombres de los paises en cada uno de los bandos.

[2]Los datos fueron obtenidos de la página Robert Axelrod

- **Aclaración:** dependiendo de su implementación, esta función puede demorar mucho en terminar. Calcular cuántas combinaciones se están comprobando y qué se está haciendo por cada una (mientras esperan que termine ☺).

1. **Mínima global** $E \approx -188.4$ (Aliados vs Eje)[3]
   - Gran Bretaña, Unión Soviética, Francia, Checoslovaquia, Yugoslavia, Grecia, Dinamarca.
   - Alemania, Italia, Polonia, Rumania, Hungría, Portugal, Finlandia, Letonia, Lituania, Estonia.
2. **Mínima local** $E \approx -182.1$ (Pro Soviéticos vs Anti Soviéticos)
   - Unión Soviética, Yugoslavia, Grecia.
   - Alemania, Gran Bretaña, Francia, Italia, Polonia, Checoslovaquia, Rumania, Hungría, Portugal, Finlandia, Letonia, Lituania, Estonia, Dinamarca.

Referencias

[1] Axelrod, R., Bennett, D.S.: A landscape theory of aggregation. British journal of political science 23(02), 211–233 (1993)

[2] Hopfield, J.J.: Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. Proceedings of the national academy of sciences 79(8), 2554–2558 (1982)

[3] Ising, E.: Beitrag zur theorie des ferromagnetismus. Zeitschrift für Physik 31(1), 253–258 (1925)

[3] Las predicción de la segunda guerra no se corresponde con la realidad en la bando de Polonia y en la de Portugal.